Pismeni ispit iz predmeta **Diferencijalna geometrija**, 14.02.2013.

Bitna napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. (a) Pokazati da kriva L: $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos t$, $(a, b, c > 0)$, leži na nekom elipsoidu.

(b) Odrediti projekciju krive L: $z = x^2 - y^2$, $x + y - z = 0$ na ravan xOy.

2. (a) Odrediti jednačinu tangente krive L: $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t$ u tački $M_0(t = 1)$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa x-osom.

(b) Odrediti jednačinu tangentne ravni površi S: $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ u tački $M_0(3, 5, 7)$ te površi.

3. Odretiti jednačinu cilindrične površi čija je direktrisa $(x - a)^2 = -k(y - b)$; $z = c$ a generatrise su paralelne pravoj $x = mz$; $y = nz$.

4. Naći površinu četverougla na helikoidu $x = au\cos v$, $y = au\sin v$, $z = bv$, $u, v \in \mathbb{R}$ ograničenog krivima $u = 0$, $u = \frac{b}{a}$, $v = 0$, $v = 1$.

Pismeni ispit iz predmeta **Diferencijalna geometrija**, 14.02.2013.

Bitna napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. (a) Pokazati da kriva L: $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos t$, $(a, b, c > 0)$, leži na nekom elipsoidu.

(b) Odrediti projekciju krive L: $z = x^2 - y^2$, $x + y - z = 0$ na ravan xOy.

2. (a) Odrediti jednačinu tangente krive L: $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t$ u tački $M_0(t = 1)$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa x-osom.

(b) Odrediti jednačinu tangentne ravni površi S: $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ u tački $M_0(3, 5, 7)$ te površi.

3. Odretiti jednačinu cilindrične površi čija je direktrisa $(x - a)^2 = -k(y - b)$; $z = c$ a generatrise su paralelne pravoj $x = mz$; $y = nz$.

4. Naći površinu četverougla na helikoidu $x = au\cos v$, $y = au\sin v$, $z = bv$, $u, v \in \mathbb{R}$ ograničenog krivima $u = 0$, $u = \frac{b}{a}$, $v = 0$, $v = 1$.

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Pokazati da kriva $L: x=a\sin^2 t,\ y=b\sin t\cos t,\ z=c\cos t$ $(a,b,c>0)$ leži na nekom elipsoidu.

Rj.

Jednačina elipsoida je $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Pa izračunajmo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

$$\frac{(a\sin^2 t)^2}{a^2}+\frac{(b\sin t\cos t)^2}{b^2}+\frac{(c\cos t)^2}{c^2}=$$

$$=\sin^4 t+\sin^2 t\cos^2 t+\cos^2 t=$$

$$=\sin^2 t\underbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}_{=1}+\cos^2 t=\sin^2 t+\cos^2 t=1.$$

(#) Odrediti projekciju krive $L: z = x^2 - y^2, \; x + y - z = 0$ na ravan xOy.

Rj.

$$\begin{array}{l} z = x^2 - y^2 \\ x + y - z = 0 \\ \hline \end{array}$$

Da bi odredili projekciju krive na xOy ravan potrebno je iz datog sistema eliminisati z.

$$\begin{array}{l} z = x^2 - y^2 \\ z = x + y \\ \hline \end{array}$$

$$x^2 - y^2 = x + y$$

$$x^2 - x - y^2 - y = 0$$

$$x^2 - y^2 - (x+y) = 0$$

$$(x-y)(x+y) - (x+y) = 0$$

$$(x+y)(x-y-1) = 0$$

$$x + y = 0 \quad \text{ili} \quad x + y - 1 = 0$$

Projekcija je

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Odrediti jednačinu tangente krive $L: x=e^t,\ y=e^{-t},$ $z=t^2$ u tački $M_0(t=1)$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa x-osom.

Rj.:

Za $t=1$ iz jednačine krive L dobijamo

$$x_0 = e$$
$$y_0 = e^{-1}$$
$$z_0 = z(1) = 1$$

pa tražimo jednačinu tangente krive L u tački $M_0(e, e^{-1}, 1)$.

Prisjetimo se

Ako tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada krivoj $L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \\ t\in I \end{cases}$

tada jednačina tangente na krivu L u tački M_0 glasi

$$\frac{x-x_0}{t_1} = \frac{y-y_0}{t_2} = \frac{z-z_0}{t_3}$$

gdje je $\vec{t}=(t_1, t_2, t_3)$ vektor tangente ($\vec{t}=\vec{u}$).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= e^t \\ \dot{y} &= -e^{-t} \\ \dot{z} &= 2t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}(1) &= e \\ \dot{y}(1) &= -e^{-1} \\ \dot{z}(1) &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{t} = (e, e^{-1}, 2)$$

Jednačina tangente u tački M_0 je $\frac{x-e}{e} = \frac{y-e^{-1}}{e^{-1}} = \frac{z-1}{2}$.

Da bi odredili ugao između tangente i x-ose, mi u stvari trebamo odrediti ugao između vektora tangente $\vec{t}$ i vektora pravca x-ose $\vec{p}=(1,0,0)$

$$\vec{p}\cdot\vec{t} = |\vec{p}|\cdot|\vec{t}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{t}) \Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{t}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{t}}{|\vec{p}||\vec{t}|}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{t} = (1,0,0)\cdot(e, e^{-1}, 2) = e$$

$$|\vec{n}| = 1$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{e^2 + e^{-2} + 4}$$

$$\cos\measuredangle(\vec{n},\vec{t}) = \frac{e}{\sqrt{e^2+e^{-2}+4}}$$

$$\measuredangle(\vec{n},\vec{t}) = \arccos\frac{e}{\sqrt{e^2+e^{-2}+4}}$$

traženi ugao.

(#) Odrediti jednačinu tangentne ravni površi

$S: x=2u-v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3-v^3$ u tački $M_0(3,5,7)$

te površi.

Rj.

Jednačina ravni ima oblik $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

gdje je $\vec{n}=(A,B,C)$ vektor normale, a (x_0,y_0,z_0) je tačka

na ravni.

Prisjetimo se $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$

Ako je površ data u parametarskom obliku

$$x=x(u,v)$$
$$y=y(u,v)$$
$$z=z(u,v)$$

tada je vektor normale $\vec{n}$ na površ dat sa

$$\vec{n}=\vec{r}\,'_u\times\vec{r}\,'_v,\quad \vec{r}\,'_u=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u},\quad \vec{r}\,'_v=\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}.$$

$$\vec{r}\,'_u=(2,\ 2u,\ 3u^2)$$

$$\vec{r}\,'_v=(-1,\ 2v,\ -3v^2)$$

Odredimo parametre u i v za tačku $M_0(3,5,7)$.

$$\left.\begin{array}{l} 2u-v=3 \quad\Rightarrow\quad v=2u-3 \\ u^2+v^2=5 \\ u^3-v^3=7 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} u^2+(2u-3)^2=5 \\ u^3-(2u-3)^3=7 \end{array}$$

$$u^2+4u^2-12u+9=5$$

$$5u^2-12u+4=0 \qquad u_{1,2}=\frac{12\pm 8}{10}$$

$$D=144-80=64 \qquad u_1=2 \quad u_2=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$u=2$: $v=1$

$u^2+v^2=5$ tačno

$u^3-v^3=7$ tačno

$u=\frac{2}{5}$: $v=\frac{4}{5}-3=-\frac{11}{5}$

$u^2+v^2=\frac{4}{25}+\frac{121}{25}=5$ tačno

$u^3-v^3=\frac{8}{5^3}+\frac{1331}{5^3}\neq 7$

ovo rješenje odpada

Prema tome $u=2$, $v=1$. Za ove vrijednosti imamo

$\vec{r}\,'_u=(2,4,12)$

$\vec{r}\,'_v=(-1,2,-3)$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 12 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=(-12-24,-(-6+12),4+4)$$

$$=(-36,-6,8)$$

$$\vec{n}=(-2)(18,3,-4)$$

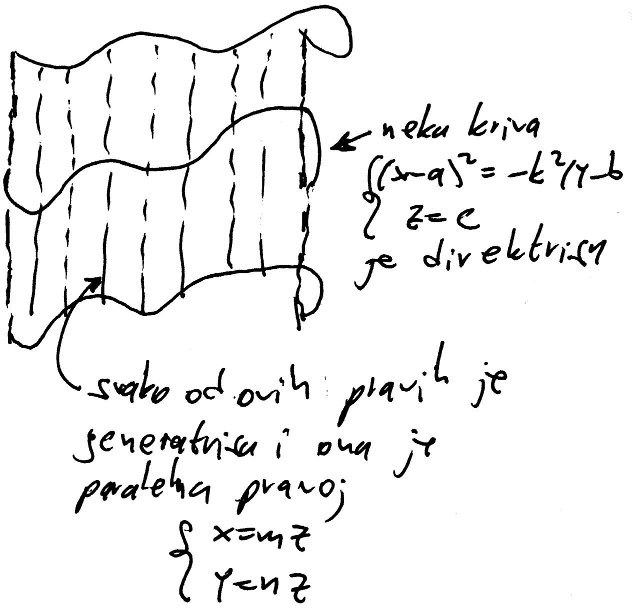
Jednačina tangentne ravni je

$$18(x-3)+3(y-5)-4(z-7)=0$$

$$18x+3y-4z-41=0$$

(#) Odrediti jednačinu cilindrične površi čija je direktrisa $(x-a)^2 = -k^2(y-b)$; $z=c$ a generatrise su paralelne pravoj $x=mz$; $y=nz$;

R.: Ako intuitivno pokušamo zamisliti ovu površ, ona bi bila



Uzmimo proizvoljnu tačku (x_1, y_1, z_1) na direktrisi. Tada je

$$(x_1-a)^2 = -k^2(y_1-b) \quad \ldots(1)$$
$$z_1 = c \quad \ldots(2)$$

Jednačina prave koja je paralelna generatrisi možemo napisati u obliku $\dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{n} = \dfrac{z}{1}$

($\vec{p} = (m, n, 1)$ vektor pravca)

Tada je jednačina generatrise kroz tačku (x_1, y_1, z_1)

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{1} \quad (=t)$$

(gdje je (x, y, z) tačka na cilindričnoj površi) tj.

$$x_1 = x - mt \quad \ldots(3)$$
$$y_1 = y - nt \quad \ldots(4)$$
$$z_1 = z - t \quad \ldots(5)$$

Eliminišući parametre x_1, y_1, z_1 i t iz (1), (2), (3), (4) i (5) dobijamo jednačinu cilindrične površi.

Parametra z_1 se možemo "riješiti" ako (2) uvrstimo u (5):

$$c = z - t \Rightarrow t = z - c \quad \ldots(6)$$

Parametra t se možemo "riješiti" ako (6) uvrstimo u (3) i (4)

$$x_1 = x - m(z-c) \quad \ldots(7)$$
$$y_1 = y - n(z-c) \quad \ldots(8)$$

Na kraju ako (7) i (8) uvrstimo u (1) dobićemo traženu jednačinu cilindrične površi

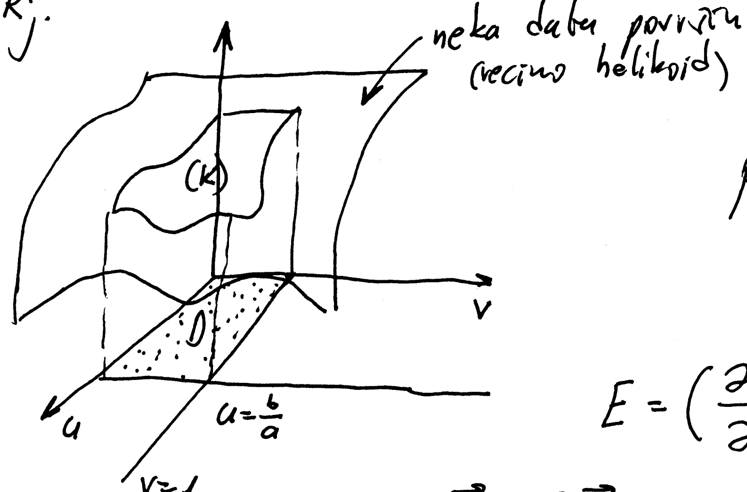
$$[x-a-m(z-c)]^2 + k^2[y-b-n(z-c)] = 0.$$

Naći površinu četverougla na helikoidu

$$x = au\cos v$$
$$y = au\sin v$$
$$z = bv, \quad u,v \in \mathbb{R}$$

ograničenog krivima $u=0$, $u=\frac{b}{a}$, $v=0$, $v=1$.

Rj.



$$P = \iint\limits_{(K)} dS = \iint\limits_{D} \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (a\cos v)^2 + (a\sin v)^2 + 0 = a^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (a\cos v, a\sin v, 0)(-au\sin v, au\cos v, b)$$
$$= -a^2u\sin v\cos v + a^2u\sin v\cos v + 0 = 0$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 = a^2u^2\sin^2 v + a^2u^2\cos^2 v + b^2 = a^2u^2 + b^2$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{a^2(a^2u^2+b^2) - 0^2} = a\sqrt{a^2u^2+b^2}$$

$$P = \iint\limits_{D} a\sqrt{a^2u^2+b^2}\, du\, dv = a\int_0^{\frac{b}{a}} \sqrt{a^2u^2+b^2}\, du \int_0^1 dv = a\int_0^{\frac{b}{a}} \sqrt{a^2u^2+b^2}\, du$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \frac{b}{a}s \\ u^2 = \frac{b^2}{a^2}s^2 \quad u\Big|_0^{\frac{b}{a}} \Rightarrow s\Big|_0^1 \\ du = \frac{b}{a}ds \end{array} \right| = a\int_0^1 \sqrt{b^2s^2+b^2}\,\frac{b}{a}\, ds = b^2\int_0^1 \sqrt{s^2+1}\, ds$$

$$\int_0^1 \sqrt{s^2+1}\, ds = \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{s^2+1} & dv = ds \\ du = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}ds & v = s \end{array} \right| = s\sqrt{s^2+1} - \int \frac{s^2 +1-1}{\sqrt{s^2+1}}\, ds$$

$$= -\int\sqrt{s^2+1}\, ds + \int\frac{ds}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1 \sqrt{s^2+1}\, ds = s\sqrt{s^2+1} + \int\frac{ds}{\sqrt{s^2+1}} = s\sqrt{s^2+1} + \ln|s+\sqrt{s^2+1}| + c$$

tražena površina

$$\Rightarrow P = \frac{b^2}{2}\left[\sqrt{2} + \ln|1+\sqrt{2}|\right]$$